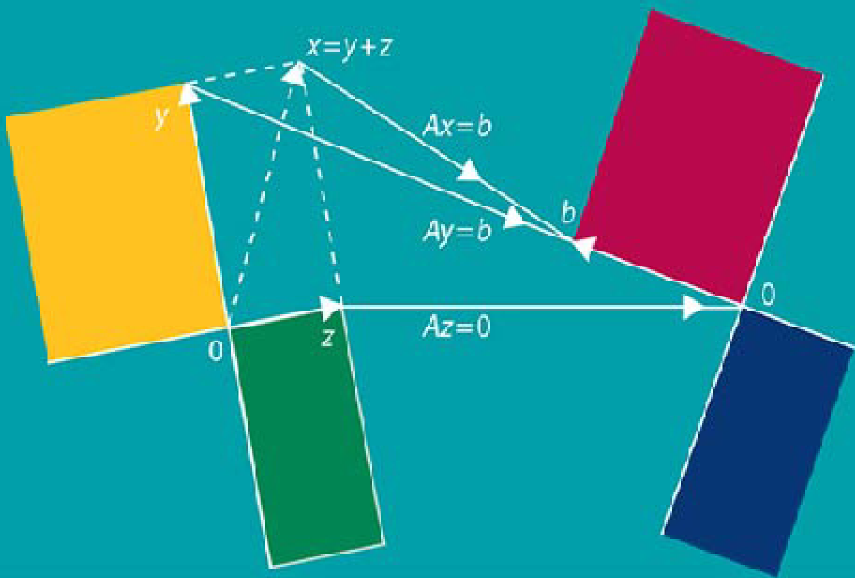
引论

线性代数

第五版



linear.neocities.org

译者：云丹风青博士

自 序

本书是根据麻省理工学院教授 Gilbert Strang 所著的 **Introduction to Linear Algebra (5th Edition)** 翻译成中文版本，全文是反复推敲，重复再重复的校对检查，希望以最简洁的语句，最接近作者原意的内容呈现给国内的读者。这本书是原作者以第一人称视角进行写作，书上常会有神来之笔，读者可以细细品味。

本人从事高等教育数十年，获有工程博士学位，早年游学美国打下扎实的英文基础。曾经编写过十多本中文大学教科书，翻译过美版 Advanced Engineering Mathematics (over 1000 pages)，发表过十多篇 SCI 论文，近年来一直在福建的高校担任校领导，作育英才，乐趣无穷。

2019 年清华大学第一次采用英文线性代数教科书，2020 年初 Corona Virus 肆虐，在此特殊时期闭门写作，希望为读者提供可以作为辅助教材的中文版本。中英相辅，比对参照，融会贯通，学习有成。本书的编排有以下几个特点：

1. 页码与原书百分百相同，原文书在第几页，中文版就在第几页。
2. 鼓励读者以原文教材为主，中文译本为辅，国际接轨与实质理解并重。
3. 本书的颜色排版尽量与原书相同，都是蓝黑两色版面。
4. 在翻译过程中发现的原文错误会以蓝色标示，下方以【...】注解，日后一起反馈给原作者。
5. 每句每字都是译者自己翻译打字，若有疏漏或错误还请反馈至邮箱。

翻译这本书工作量很大，也没有与出版社签订合作协议，纯粹是个人的喜好，更需要读者的支持与赞助，请尊重版权，尊重个人的智慧与劳动成果。

英文教科书正文共有 **565** 页，反馈与讨论，PDF 打印密码，打赏二维码，请联系：

网址：linear.neocities.org

QQ：876152660　　　　QQ 二维码 →

EMail: 876152660@qq.com

您的支持是译者持续奋斗的动力!

Thank you very much!　　2020/02/10

目 录

第一章

向量介绍

线性代数的中心是两个运算––都是针对向量。我们把向量相加得到 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$，我们用数字 c 与 d 乘向量得到 $c\boldsymbol{v}$ 与 $d\boldsymbol{w}$，组合这两种运算($c\boldsymbol{v}$ 加到 $d\boldsymbol{w}$)得到**线性组合** $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

线性组合	$c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}=c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c+2d\\c+3d\end{bmatrix}$

范例 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$，是 $c=d=1$ 的组合。

线性组合是这个主题中最重要的概念！有时候我们需要一个特定的组合，选择 $c=2$ 与 $d=1$ 产生 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}=(4, 5)$。其他时候我们想要 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 所有的组合(来自所有的 c 与 d)。

向量 $c\boldsymbol{v}$ 沿着一条直线，当 $\boldsymbol{w}$ 不在这条线上时，**组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 会形成整个二维平面**。如果从 4 维空间的 4 个向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}$ 开始，他们的组合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}+f\boldsymbol{z}$ 好像会形成空间––但不是绝对。向量以及他们的组合可以落在一个平面或是一条直线。

第一章说明建立所有事物的中心观念，我们从二维与三维向量开始，这些向量比较容易制图，之后再讨论更高的维度。线性代数最深刻的特征在于如何平顺的将这些步骤扩展到 n 维空间。纵使不可能画出 10 维的向量，你内心的蓝图依然完全正确。

这就是本书的目的(推进到 n 维空间)。第一步是段落 1.1 与 1.2 的运算，段落 1.3 介绍三个基本概念。

1.1 向量加法 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 与线性组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

1.2 两个向量的点积(**dot product**) $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 与长度 $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$ 。

1.3 矩阵 A，线性方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，解 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$。

1.1 向量与线性组合

1 $3\boldsymbol{v}+5\boldsymbol{w}$ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的**线性组合** $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 的一个典型。

2 当 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$，上述的组合是 $3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+10\\3+15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\18\end{bmatrix}$。

3 向量 $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ 在 xy 平面横跨到 $x=2$ 再往上到 $y=3$。

4 组合 $c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ 形成整个 xy 平面，他们产生每个 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$。

5 组合 $c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ 形成 xyz 空间中的一个平面。$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$ 形成相同的平面。

6 但是 $\begin{aligned}c+2d&=1\\c+3d&=0\\c+4d&=0\end{aligned}$ 无解，因为它的右侧 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 不在那个平面上。

“你无法把苹果与橙子相加”，以奇怪的方式来说，向量也是一样的理由。我们有两个个别的数字 v_1 与 v_2，这项配对产生**二维向量** $\boldsymbol{v}$：

$$\textbf{列向量 } \boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}v_1&=\boldsymbol{v}\text{ 的第一分量}\\v_2&=\boldsymbol{v}\text{ 的第二分量}\end{aligned}$$

我们把 $\boldsymbol{v}$ 写成一列(column)，而不是一行(row)，重点在于单一的字母 $\boldsymbol{v}$(**粗斜体字**)代表这项配对数字 v_1 与 v_2 (浅色斜体字)。

我们不是把 v_1 与 v_2 相加，我们是把**向量相加**。$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的第一分量与第二分量仍然分开：

$$\text{向量加法} \qquad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} \quad \text{与} \quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix} \quad \text{相加得到} \quad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\end{bmatrix}$$

减法追随相同的概念：$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$ 的分量是 v_1-w_1 与 v_2-w_2。

另一个基础运算是纯量(scalar)乘法，向量可以用 2 或-1 或任意数 c 去乘，要求出 $2\boldsymbol{v}$，用 2 乘 $\boldsymbol{v}$ 的每个分量：

$$\text{纯量乘法} \qquad 2\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2v_1\\2v_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\,, \quad -\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-v_1\\-v_2\end{bmatrix}.$$

$c\boldsymbol{v}$ 的分量是 cv_1 与 cv_2，数字 c 称为“纯量”。

注意$-\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的总和(sum)是零向量，以粗体 $\mathbf{0}$ 表示，与一般的数字 0 不相同，向量 $\mathbf{0}$ 的分量是 0 与 0。请原谅我一直在反复谈论向量与分量的差别，线性代数就是建立在 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 与 $c\boldsymbol{v}$ 与 $d\boldsymbol{w}$ 的运算——**向量加法与纯量乘法**。

线性组合

我们现在结合加法与纯量乘法产生 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的“线性组合”，c 乘 $\boldsymbol{v}$ 以及 d 乘 $\boldsymbol{w}$，然后相加得到 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

$c\boldsymbol{v}$ 与 $d\boldsymbol{w}$ 的总和是 线性组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

四种特殊的线性组合是：和，差，零，纯量乘积 $c\boldsymbol{v}$：

$1\boldsymbol{v}+1\boldsymbol{w}=$ 向量的和，如图 1.1a

$1\boldsymbol{v}-1\boldsymbol{w}=$ 向量的差，如图 1.1b

$0\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{w}=$ **零向量**

$c\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{w}=$ 沿着 $\boldsymbol{v}$ 方向的向量 $c\boldsymbol{v}$

零向量永远是可能的组合(它的系数为零)，每次我们看到向量的“空间(space)”都会包含零向量。从大局来看，取得 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 所有的线性组合就是线性代数的工作。

图形让你看到向量，对代数来说，我们只需要向量的分量(例如 4 与 2)。向量 $\boldsymbol{v}$ 由箭头表示，箭头往右横跨 $v_1=4$ 个单位，再往上走 $v_2=2$ 个单位，终点的 x, y 坐标等于 4, 2。这个点是向量的另外一种表示法——我们有三种方式来描述 $\boldsymbol{v}$：

向量 $\boldsymbol{v}$ 表示法 两个数字 由(0, 0)出发的箭头 平面上的点

我们用数字做加法，我们用箭头视觉化 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$：

向量加法(头到尾)，$\boldsymbol{v}$ 的终点就是 $\boldsymbol{w}$ 的起点

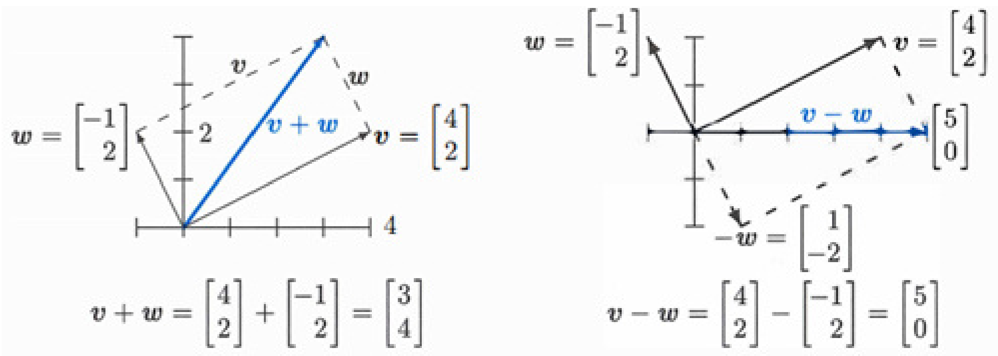


图 1.1：向量加法 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(3, 4)$产生平行四边形的对角线，$\boldsymbol{w}$ 的反向是$-\boldsymbol{w}$，右侧的线性组合是 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}=(5, 0)$。

我们先沿着 $\boldsymbol{v}$ 再沿着 $\boldsymbol{w}$ 前进，或者我们沿着 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 走对角捷径；我们也可以先沿着 $\boldsymbol{w}$ 再沿着 $\boldsymbol{v}$。换言之，$\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ **的答案相同**。沿着平行四边形(本例题是矩形)存在不同的前进方向。

三维向量

具有两个分量的向量对应到 xy 平面上的一个点，$\boldsymbol{v}$ 的分量就是点的坐标: $x = v_1$ 与 $y = v_2$。向量从(0, 0)出发，箭头在点(v_1，v_2)结束。我们现在允许向量有三个分量(v_1, v_2, v_3)。

xy 平面换成三维的 xyz 空间，以下是一些典型向量(依然是列向量，只是有 3 个分量)：

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} \quad 与 \quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} \quad 与 \quad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$$

向量 $\boldsymbol{v}$ 对应到三维空间的一个箭头，通常箭头由**原点**出发，原点是 xyz 轴的交点，坐标为(0, 0, 0)，箭头终点的坐标是 v_1, v_2, v_3。**列向量，原点出发的箭头与箭头的终点**，这三种表示法之间有着完美的适配。

平面向量(x, y)与 3 维空间的(x, y, 0)不相同！

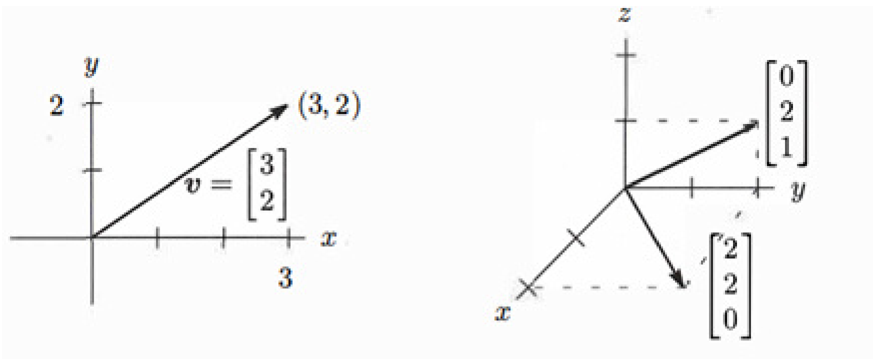


图 1.2：向量$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$对应点($x$, y)与(x, y, z)

从此以后 $\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 也可以写成 $\quad \boldsymbol{v} = (1, 1, -1)$

写成行形式(在括号中)的理由是为了节省空间，但是 $\boldsymbol{v} = (1, 1, -1)$不是行向量！实际上还是列向量，只是暂时横躺而已。行向量[1 1 −1]是绝对不同的，虽然它有相同的三个分量。1×3 的行向量是 3×1 的列向量 $\boldsymbol{v}$ 的“转置”(transpose)。

三维空间中，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 仍然是每次计算一个分量，向量总和的分量是 v_1+w_1 与 v_2+w_2 与 v_3+w_3，你了解如何在 4 或 5 或 n 维空间中相加向量。当 $\boldsymbol{w}$ 从 $\boldsymbol{v}$ 的终点出发，第三边是 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$，平行四边形的另一个环绕方向是 $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$。问题：这四边是否在同一个平面？答案：**是**。向量的和 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$ 刚好走完一圈得到______向量。

三维空间中典型的三个向量的线性组合是 $\boldsymbol{u}+4\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{w}$：

分别用 1, 4, –2 乘再相加的线性组合 $$\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\9\end{bmatrix}$$

重要问题

一个向量 $\boldsymbol{u}$，唯一的线性组合是倍数 $c\boldsymbol{u}$。对于两个向量，线性组合是 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$。对三个向量，线性组合是 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$。你可以由一个组合跨一大步到**所有的组合**吗？允许每个 c 与 d 与 e，假设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 是三维空间中的向量：

1. 所有 $c\boldsymbol{u}$ 的组合，图形是什么？
2. 所有 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 的组合，图形是什么？
3. 所有 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 的组合，图形是什么？

上述的答案与特定向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 有关，如果他们都是零向量(非常极端案例)，所有的线性组合都是零。如果他们是典型的非零向量(随机选定分量)，这里有三种答案。这是我们主题的关键：

1. 所有 $c\boldsymbol{u}$ 的组合形成一条**通过(0, 0, 0)的直线**。
2. 所有 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 的组合形成一个**通过(0, 0, 0)的平面**。
3. 所有 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 的组合形成**三维空间**。

因为 c 可以是 0，零向量(0, 0, 0)会在直线上；当 c 与 d 都是 0，零向量会在平面上。向量 $c\boldsymbol{u}$ 形成直线是无限长(正向与反向)，我特别要求你去思考全部 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 形成的平面(三维空间中两个向量的组合)。

一条直线上的所有 $c\boldsymbol{u}$ 加到另一条直线上的所有 $d\boldsymbol{v}$ 会形成图 1.3 的平面。

当我们引入第三向量 $\boldsymbol{w}$ 时，$e\boldsymbol{w}$ 的倍数得到第三条直线。假设第三条直线不在 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 形成的平面上，则 $e\boldsymbol{w}$ 与 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 的组合可以形成整个三维空间。

这是典型的状况！线，平面，然后空间，但是还有其他可能性存在。当 $\boldsymbol{w}$ 恰好等于 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$，第三向量 $\boldsymbol{w}$ 落在前两个向量形成的平面上，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的组合无法离开 $\boldsymbol{uv}$ 平面，我们没有得到整个三维空间。请思考问题 1 的特殊例子。

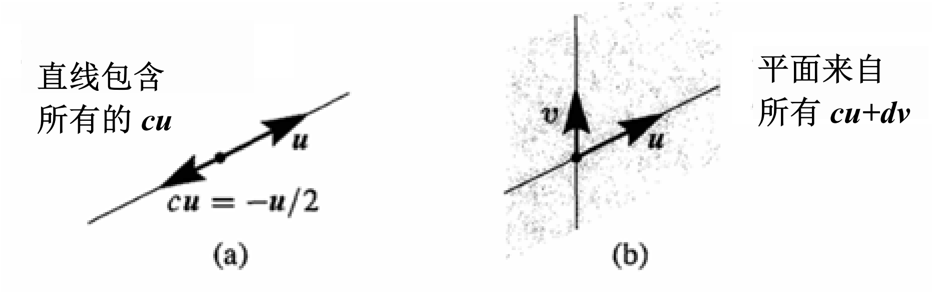


图 1.3：(a) 穿过 $\boldsymbol{u}$ 的直线。(b) 包含穿过 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 直线的平面

主要观念的复习

1. 二维空间的向量 $\boldsymbol{v}$ 具有两个分量 v_1 与 v_2。
2. $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(v_1+w_1, v_2+w_2)$与 $c\boldsymbol{v}=(cv_1, cv_2)$，每次求取一个分量。
3. 三个向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的线性组合是 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$。
4. 选取所有 $\boldsymbol{u}$ 或是 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 或是 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 的线性组合，在三维空间中，这些组合典型的形成一条直线或是一个平面或是整个空间 $\mathbf{R}^3$。

已解范例

1.1A $\boldsymbol{v}=(1, 1, 0)$与 $\boldsymbol{w}=(0, 1, 1)$的线性组合会形成 $\mathbf{R}^3$ 的一个平面，请描述这个平面，并且找出一个不是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的线性组合的向量--不在该平面上。

解 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 形成的平面包含所有组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$，平面上的向量允许任意的 c 与 d。图 1.3 的平面形成两条线之间的区域。

$$\text{组合 } c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}=c\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\c+d\\d\end{bmatrix}\text{ 形成一个平面。}$$

这个平面的四个向量是(0, 0, 0), (2, 3, 1), (5, 7, 2)以及(π, 2π, π)。第二分量 $c+d$ 永远是第一与第三分量的总和。大部分的向量，例如(1, 2, 3)就不在这个平面上，因为 $2\neq 1+3$。

通过(0, 0, 0)平面的另一种描述方法是知道 $\boldsymbol{n}=(1, -1, 1)$与平面**垂直**，段落 1.2 测试点积来确认 90°角：$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 与 $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}=0$。垂直向量的点积为零。

1.1B $\boldsymbol{v}=(1,0)$与 $\boldsymbol{w}=(0,1)$，描述所有 $c\boldsymbol{v}$ 的点，当(1) 所有的数值 c。(2) 非负数值 $c\geq 0$。将 $c\boldsymbol{v}$ 加上所有 $d\boldsymbol{w}$，描述所有的 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

解

(1) 当 c 是任意数时，向量 $c\boldsymbol{v}=(c,\ 0)$是沿着 x 轴($\boldsymbol{v}$ 的方向)的等距离点，他们包含$(-2,0), (-1,0), (0,0), (1,0), (2,0)$。

(2) 当 $c\geq 0$，向量 $c\boldsymbol{v}$ 形成一条**半线**，就是正 x 轴。这条半线从$(0,0)$开始，此时 $c=0$。它包含了点$(100,0)$与$(\pi,0)$，但不包含$(-100,0)$。

(1’) 加上所有的向量 $d\boldsymbol{w}=(0,d)$，会在这些等距离点 $c\boldsymbol{v}$ 上放置一条垂直线，我们得到无限多来自全部的数值 c 与任意数值 d 的平行线。

(2’) 加上所有的向量 $d\boldsymbol{w}=(0,d)$，会在半线上的每一个 $c\boldsymbol{v}$ 放置一条垂直线，现在我们有一个**半平面**，xy 平面的右半部分有任意的 $x\geq 0$ 与任意的 y。

1.1C 求出 c 与 d 的两个方程式，使得**线性组合** $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 等于 $\boldsymbol{b}$：

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

解　在应用数学中，很多问题都有两个部分：

1. 建模(modeling)部分：利用一些方程式来表示问题。
2. 计算部分：利用快速又正确的演绎法求解方程式。

在此我们只讨论第一部分(方程式)，第二章会介绍第二部分(求解)。我们的范例适配一个线性代数的基础模型：

$$\text{求 } n \text{ 个数值 } c_1,\dots,c_n \text{ 使得 } c_1\boldsymbol{v}_1+\dots+c_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{b}$$

当 $n=2$ 我们可以找到关于 c’s 的公式，第二章介绍的“消元法”适用于远超过 $n=1000$ 的系统。当 n 大于 10 亿时，参考第 11 章。此处 $n=2$：

向量方程式 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}=\boldsymbol{b}$　　$c\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

c 与 d 所需要的方程式来自个别的两个分量：

两个一般方程式　$$\begin{aligned}2c-\ d&=1\\-c+2d&=0\end{aligned}$$

每个方程式产生一条直线，两条直线相交于解 $c=2/3,\ d=1/3$。也可以把这个问题视为**矩阵方程式**，这就是我们想要往下介绍的：

$$\textbf{2×2 矩阵}\quad \begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

问题集 1.1

问题 1-9 有关向量加法以及线性组合。

1　描述下列所有的线性组合的几何意义(线，面，或是整个 $\mathbf{R}^3$)：

$$(a)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}与\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}\quad(b)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}与\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}\quad(c)\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}与\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}与\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}$$

2　在单一 xy 平面上画出 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$与$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$以及 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$。

3　若 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$与$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$，计算并画出向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$。

4　从 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$与$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，计算 $3\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 与 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 的分量。

5　计算 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 以及 $2\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$。你如何知道 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 在同一个平面上?

因为 $\boldsymbol{w}=c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$
这些直线在同一平面
求 c 与 d

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-3\\1\\-2\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}2\\-3\\-1\end{bmatrix}$$

6　$\boldsymbol{v}=(1,-2,1)$与 $\boldsymbol{w}=(0,1,-1)$的每个组合的分量总和是 _____。求 c 与 d 使得 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{w}=(3,3,-6)$。为什么不可能是(3, 3, 6)?

7　在 xy 平面上标示出九个线性组合的点：

$$c\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}，其中\ c=0,1,2\ 与\ d=0,1,2$$

8　图 1.1 的平行四边形的对角线是 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$，另一个对角线为何? 这两个对角线向量的总和是多少? 画出向量的总和。

9　如果平行四边形的三个角点是(1, 1), (4, 2)与(1, 3)，则三个可能的第四点为何? 画出其中两个点。

问题 10-14 有关图 1.4 的立方体与时钟的特殊向量。

10　立方体上的哪个点是 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$? 哪个点是向量 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$与 $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$与 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$的总和? 描述立方体上所有的点(x,y,z)。

11　单位立方体的四个角点是(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)，其他四个角点为何? 求出立方体的中心点坐标。六个面的中心点坐标是_______。立方体有几个边?

12　**复习问题**。在 xyz 空间中，$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$与 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}=(1,1,0)$的所有线性组合形成的平面为何?

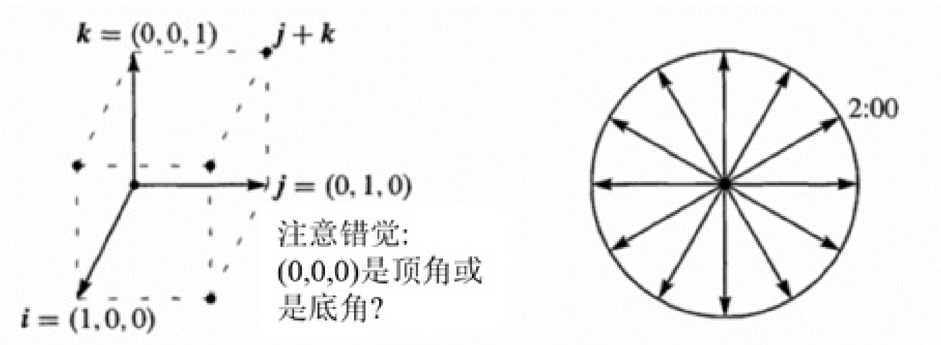


图 1.4：***i*, *j*, *k*** 构成的单位立方体与 12 个时钟向量

13 (a) 考虑 12 个由中心点指向时钟 1:00，2:00, ..., 12:00 的向量，其总和 $\boldsymbol{V}$ 为何？

(b) 如果把 2:00 的向量移走，为什么其余 11 个时钟向量的总和指向 8:00?

(c) 在 2:00 的向量 $\boldsymbol{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$，求出 x 与 y 的分量。

14 假设 12 个向量是由底部的 6:00 出发而不是由中心的(0, 0)出发，指向 12:00 的向量变成两倍的(0, 2), 则全部 12 个新的时钟向量总和为何?

问题 15-19 深入讨论 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的线性组合(图 1.5a)。

15 图 1.5a 显示 $\boldsymbol{v}/2 + \boldsymbol{w}/2$，请标示点 $3\boldsymbol{v}/4 + \boldsymbol{w}/4$ 与 $\boldsymbol{v}/4 + \boldsymbol{w}/4$ 与 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$。

16 标示点$-\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w}$ 以及当 $c + d = 1$ 时所有可能的 $c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$。当 $c + d = 1$ 时，画出所有组合的直线。

17 标示点 $\boldsymbol{v}/3 + \boldsymbol{w}/3$ 与 $2\boldsymbol{v}/3 + 2\boldsymbol{w}/3$。$c\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$ 会形成哪条直线?

18 限制 $0 \le c \le 1$ 且 $0 \le d \le 1$, 画出 $c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$ 所有的组合形成的区域。

19 只限制 $c \ge 0$ 且 $d \ge 0$，画出 $c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$ 所有的组合形成的“锥形(cone)”。

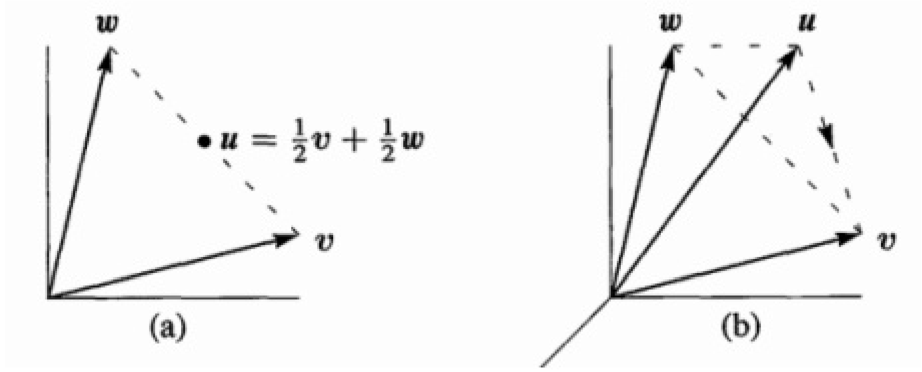


图 1.5：问题 **15-19** 的平面　　　　问题 **20-25** 的三维空间

问题 20-25 处理三维空间向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$。(见图 1.5b)。

20 标示图上 $\boldsymbol{u}/3+\boldsymbol{v}/3+\boldsymbol{w}/3$ 以及 $\boldsymbol{u}/2+\boldsymbol{w}/2$ 的位置。挑战问题：c, d, e 在什么限制条件下，$c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 会形成图上的虚线三角形？要想留在三角形内，一个要求是 $c \geq 0, d \geq 0, e \geq 0$。

21 虚线三角形的三个边是 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}$, 他们的总和是_____。画出环绕平面三角形的“头至尾”的加法：$(3, 1)+(-1, 1)+(-2, -2)$。

22 当 $c \geq 0, d \geq 0, e \geq 0$ 且 $c+d+e \leq 1$，画出 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 覆盖的金字塔(pyramid)区域。确认$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})/2$ 是否在金字塔之内？

23 如果考虑 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 所有的线性组合，有没有向量无法由 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 得到？如果 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 全部位于_________，会有不同的答案。

24 哪些向量是 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的线性组合，同时也是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的线性组合？

25 画出向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$，使得他们的组合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 只形成一条直线。求出向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 使得组合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 只形成一个平面。

26 什么样的组合 $c\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ 得到 $\begin{bmatrix}14\\8\end{bmatrix}$？将方程式表示成线性组合的系数 c 与 d 的两个方程式。

挑战问题

27 在 4 维空间的立方体会有几个角点？有几个 3 维的面？有几个边？一个典型的角点在(0, 0, 1, 0)，一个典型的边会走到(0, 1, 0, 0)。

28 求出向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$，使得 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(4, 5, 6)$且 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}=(2, 5, 8)$。这是一个有____个未知数的方程式？要有相同数量的方程式才能求出这些数值。

29 三个向量 $\boldsymbol{u}=(1, 3), \boldsymbol{v}=(2, 7), \boldsymbol{w}=(1, 5)$，找出两种不同的线性组合得到 $\boldsymbol{b}=(0, 1)$。稍微变动一下题目：如果我随意选出三个平面上的向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$，是不是永远存在两种不同的线性组合可以得到 $\boldsymbol{b}=(0, 1)$?

30 $\boldsymbol{v}=(a, b)$与 $\boldsymbol{w}=(c, d)$的线性组合可以得到一个平面，除非_________。找出四个 4 维空间的向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}$ 使得他们的线性组合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}+f\boldsymbol{z}$ 产生 4 维空间的所有向量(b_1, b_2, b_3, b_4)。

31 写下 c, d, e 的方程式，使得 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}=\boldsymbol{b}$。你可以找出满足 $\boldsymbol{b}$ 的 c, d, e 吗?

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

1.2　长度与点积

1. $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$与$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$的“点积”是 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=(1)(4)+(2)(5)=4+10=\mathbf{14}$。

2. $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}4\\-4\\4\end{bmatrix}$垂直，这是因为 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 是零。$(1)(4)+(3)(-4)+(2)(4)=\mathbf{0}$。

3. $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$的长度平方是 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=1+9+4=14$，长度是$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{14}$ 。

4. $\boldsymbol{u}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{14}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$有长度$\|\boldsymbol{u}\|=1$，检验$\dfrac{1}{14}+\dfrac{9}{14}+\dfrac{4}{14}=1$。

5. $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 之间的角度θ 有 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}$。

6. $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$之间的角度有 $\cos\theta=\dfrac{1}{(1)(\sqrt{2})}$，则角度$\theta=45°$。

7. 所有的角都有$|\cos\theta|\le 1$，所以所有的向量都有 $\boxed{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\le\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}$ 。

第一个段落回避了向量乘法的问题，我们现在来定义 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的点积 (dot product)，这种乘法包含了个别的乘积 v_1w_1 与 v_2w_2，但是没有停在这里，这两个数字相加得到一个数字 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$。

这是几何的段落(向量的长度与两向量之间夹角的余弦)。

两个向量 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2)$与 $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2)$的**点积**或**内积**是数字 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=v_1w_1+v_2w_2 \tag{1}$$

范例 1　向量 $\boldsymbol{v}=(4, 2)$与 $\boldsymbol{w}=(-1, 2)$有零点积：

点积为零，垂直向量　$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=-4+4=0$

数学里面的 0 一直是特殊的数字。对于点积，它表示这两个向量垂直，夹角 90°。当我们在图 1.1 中作图，我们看到了矩形(不只是任意平行四边形)。垂直向量最明显的例子是沿着 x 轴的 $\boldsymbol{i}=(1, 0)$与沿着 y 轴的 $\boldsymbol{j}=(0, 1)$，再一次点积是 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0+0=0$，这些向量 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 形成直角。

向量 $\boldsymbol{v}=(1,2)$与 $\boldsymbol{w}=(3,1)$的点积是 5，很快的 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 就会显示 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 之间的夹角(不是 90°)。请验证 $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}$ 也是 5。

$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}$ 的点积相等，无关 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的顺序。

范例 2 放一个重量 4 的东西在点 $x=-1$(零的左边)，放一个重量 2 的东西在点 $x=2$(零的右边)，x 轴会在中心点取得平衡(好像跷跷板)，重量取得平衡是因为点积 $(4)(-1)+(2)(2)=0$。

这个例子是典型的科学工程，重量的向量是$(w_1, w_2)=(4,2)$，距离中心点的距离向量是$(v_1, v_2)=(-1,2)$。重量乘距离 v_1w_1 与 v_2w_2 得到"矩(moments)"，跷跷板的平衡方程式是 $v_1w_1+v_2w_2=0$。

范例 3 点积在经济与商业都会用到，比如我们要买卖 3 个商品，他们的单价分别是(p_1, p_2, p_3)—这是"价格向量"；我们买或卖的数量为(q_1, q_2, q_3)，卖的时候取正号，买的时候取负号。单价 p_1 的商品卖出 q_1 个得到 p_1q_1，全部收入(数量 q 乘价格 p)就是在三维空间的点积 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}$：

$$\text{收入}=(q_1,q_2,q_3)\cdot(p_1,p_2,p_3)=q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3=\text{点积}$$

零点积表示账目平衡。如果 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}=0$，全部销售额等于全部买进额，$\boldsymbol{p}$ 垂直 $\boldsymbol{q}$(在三维空间)。一家超市有几千种货品，货物的维度会非常高。

小注释：电子表格在管理中非常重要，可以计算线性组合与点积，在屏幕上看到的是个矩阵。

重点　对于 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$，每个 v_i 乘 w_i，则 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=v_1w_1+\ldots+v_nw_n$。

长度与单位向量

有个重要的案例就是向量自己与自己的点积，此时 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$。当向量 $\boldsymbol{v}=(1,2,3)$，自己与自己的点积为 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\|\boldsymbol{v}\|^2=14$：

$$\text{点积 } \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} \text{ 是长度的平方}\quad \|\boldsymbol{v}\|^2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=1+4+9=14。$$

现在向量之间的角度不是 90°而是 0°，$\boldsymbol{v}$ 与自己不垂直所以点积不是 0。点积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ 给出 $\boldsymbol{v}$ 的长度平方。

定义　向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度 $\|\boldsymbol{v}\|$ 等于 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ 的平方根：

$$\text{长度}=\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}=(v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2)^{1/2}$$

在二维的长度是$\sqrt{v_1^2+v_2^2}$，在三维的长度是$\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$，这样的计算得到 $\boldsymbol{v}=(1,2,3)$的长度是$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{14}$。

此处$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$是代表向量的箭头的一般长度。如果分量是 1 与 2，箭头就是图 1.6 所示直角三角形的第三边，毕氏定理 $a^2+b^2=c^2$ 得到三边的关系是 $1^2+2^2=\|\boldsymbol{v}\|^2$。

对于 $\boldsymbol{v}=(1,2,3)$的长度来说，我们使用直角三角形的公式两次。位于基底的向量(1, 2, 0)的长度是$\sqrt{5}$，基底向量与直線向上的向量(0, 0, 3)垂直，所以盒子的对角线长度$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{5+9}=\sqrt{14}$。

四维向量的长度等于$\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2}$，于是向量(1, 1, 1, 1)的长度是$\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}=2$，这是一个四维空间的单位立方体的对角线长度。$n$ 维空间立方体的对角长度是$\sqrt{n}$

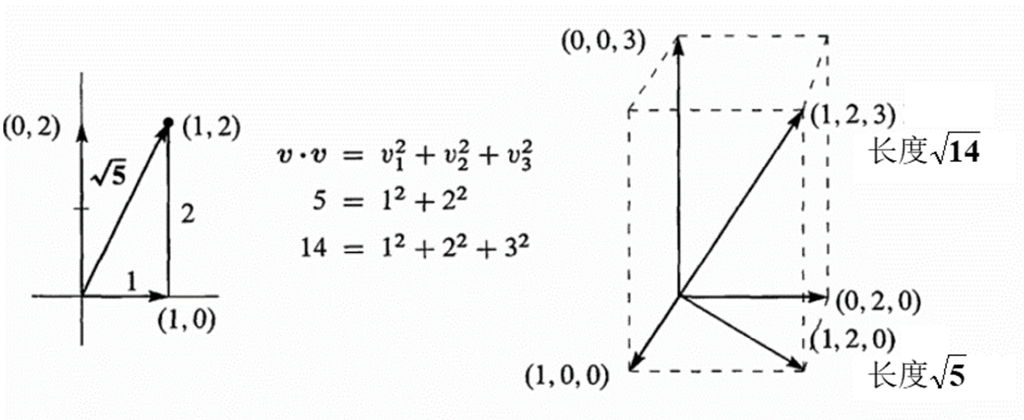


图 1.6：二维与三维向量的长度$\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$

单位这个词通常用来表示某种测量值等于 1，单位价格是指一个物品的价格，单位立方体的边长为 1，单位圆的半径为 1。现在讨论“单位向量”的意义。

定义 　　单位向量 $\boldsymbol{u}$ 是长度为 1 的向量，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=\mathbf{1}$。

举例来说四维的单位向量是 $\boldsymbol{u}=(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$，则 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=1/4+1/4+1/4+1/4=1$。向量 $\boldsymbol{v}=(1,1,1,1)$，除以本身的长度$\|\boldsymbol{v}\|=2$ 得到单位向量。

范例 4 　沿着 x 轴与 y 轴的标准单位向量写成 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$，在 xy 平面中，单位向量与 x 轴形成夹角 θ，这个单位向量就是$(\cos\theta, \sin\theta)$。

$$\text{单位向量}\qquad \boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

当 $\theta=0$，水平向量 $\boldsymbol{u}$ 就是 $\boldsymbol{i}$，当 $\theta=90°$(或 $\pi/2$ 径度)，垂直向量就是 $\boldsymbol{j}$。任何角度下，分量 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 会得到 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=1$，这是因为 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$。

这些向量往外伸展得到图 1.7 的单位圆，单位圆上角度为 θ 的点坐标是 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$。

由于(2, 2, 1)的长度是 3，向量(2/3, 2/3, 1/3)长度是 1，检验得到 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 4/9 + 4/9 + 1/9 = 1$。任何非零向量 $\boldsymbol{v}$ 除以本身的长度 $\|\boldsymbol{v}\|$ 就是单位向量。

单位向量 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} / \|\boldsymbol{v}\|$ 是在 $\boldsymbol{v}$ 方向的单位向量。

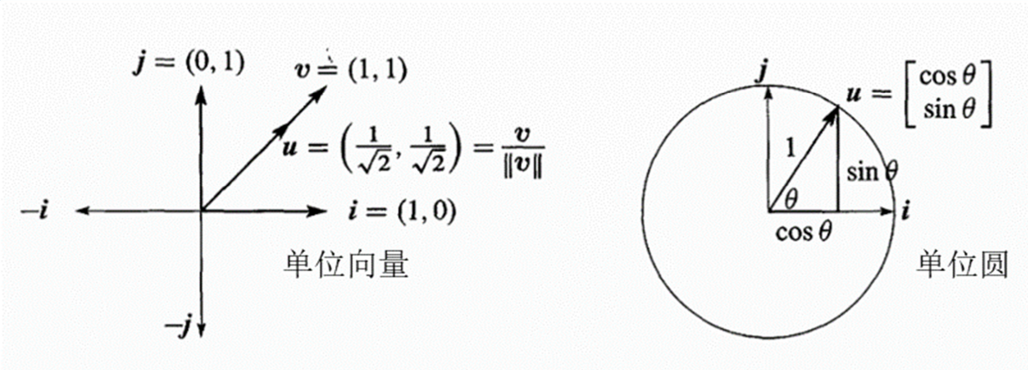


图 1.7：坐标向量 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$。位于 45°(左图)的单位向量 $\boldsymbol{u}$ 是 $\boldsymbol{v} = (1, 1)$除以本身长度 $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2}$。单位向量 $\boldsymbol{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$的角度是 θ。

两个向量之间的夹角

我们说垂直向量有 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0$，当角度是 90°时点积为 0。为了说明，我们将角度与点积进行关联，展示如何利用 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 求出两个非零向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的夹角。

直角　　当 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 垂直，点积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$。

证明　当 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 垂直，他们形成直角的两个边，第三边为 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ (斜边如图 1.8)。毕氏定理说明直角三角形的边有 $a^2 + b^2 = c^2$：

$$\text{垂直向量}\qquad \|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2 \tag{2}$$

以二维的方式写出上述长度的公式，方程式是：

$$\text{毕氏定理}\qquad (v_1^2 + v_2^2) + (w_1^2 + w_2^2) = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 \tag{3}$$

右侧从 $v_1^2 - 2v_1w_1 + w_1^2$ 开始，两侧都有 v_1^2 与 w_1^2 可以对消，剩下$-2v_1w_1$。同理 v_2^2 与 w_2^2 可以对消，剩下$-2v_2w_2$。(如果是三维向量，还会有$-2v_3w_3$)。现在两边同除-2 得到 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0$。　【原文写成 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = 0$ 是错误】

$$0 = -2v_1w_1 - 2v_2w_2 \text{ 得到 } v_1w_1 + v_2w_2 = 0 \tag{4}$$

结论　直角產生 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0$。当角度 $\theta = 90°$，点积为 0，此时 $\cos\theta = 0$。因为 $\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{w}$ 永远为 0，所以零向量 $\boldsymbol{0}$ 与所有向量 $\boldsymbol{w}$ 垂直。

现在假设 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 不是零，可以为正也可以为负，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 的正负号可以立即知道是小于还是大于直角。当 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 为正，角度小于 90°；当 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 为负，角度大于 90°。图 1.8 的右侧展示典型向量 $\boldsymbol{v}=(3,1)$，它与 $\boldsymbol{w}=(1,3)$的夹角小于 90°，这是因为 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=6$ 正数。

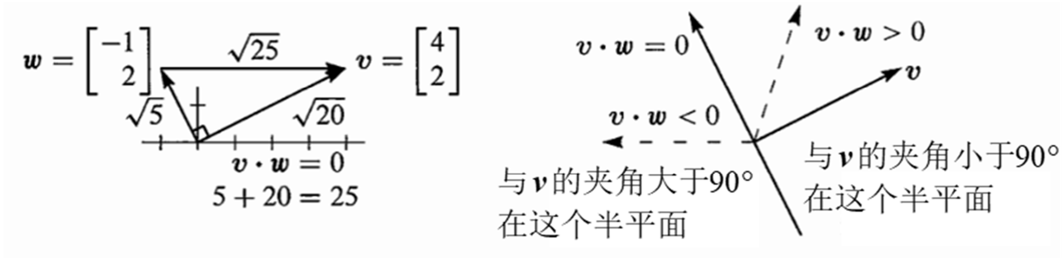


图 1.8：垂直向量有 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$，则 $\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\boldsymbol{w}\|^2=\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2$

边界线是向量与 $\boldsymbol{v}$ 垂直的位置，(1, –3)位于正负之间的分界线，所以(1, –3)与(3, 1)垂直，点积为零。

点积可以算出真正的角度 θ。对于两个单位向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 来说，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{U}$ 的符号可以决定 $\theta<90°$或是 $\theta>90°$。除此之外，点积 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{U}$ 的值就是 $\cos\theta$。对于 n 维空间而言，前面的观念也是正确的。

两个单位向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{U}=\cos\theta$，当然 $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{U}|\le 1$。

记得 $\cos\theta$ 不会大于 1，也不会小于–1，单位向量之间的点积会落在–1 与 1 之间，**$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{U}$ 的值就是 $\cos\theta$。**

图 1.9 清楚显示 $\boldsymbol{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$与 $\boldsymbol{i}=(1,0)$，点积 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}=\cos\theta$，这是两个向量夹角的余弦。

旋转任何角度 α 之后，他们仍然是单位向量。向量 $\boldsymbol{i}=(1,0)$旋转至$(\cos\alpha,\sin\alpha)$，向量 $\boldsymbol{u}$ 旋转至$(\cos\beta,\sin\beta)$，其中 $\beta=\alpha+\theta$。他们的点积是 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，由三角定理得到 $\cos(\beta-\alpha)=\cos\theta$。

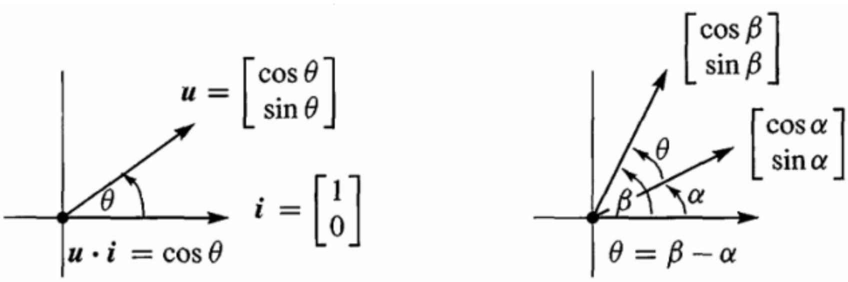


图 1.19：单位向量：$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{U}$ 等于 θ(夹角)的余弦

如果 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 不是单位向量会怎么样？除以个别的长度得到 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$, $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{w}/\|\boldsymbol{w}\|$，则单位向量的点积得到 $\cos\theta$。

余弦公式　若 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 是非零向量，则 $\boxed{\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}=\cos\theta}$　(5)

无论什么角度，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$与 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{w}/\|\boldsymbol{w}\|$ 的点积不会超过 1，这就是“**苏瓦兹不等式**”：$|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\le\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$——更准确的说法是柯西-苏瓦兹-布尼亚克斯基不等式，分别在法国、德国、俄罗斯发表(也许有其他地方，这是数学上最重要的不等式)。由于$|\cos\theta|$不会超过 1，余弦公式得到两个伟大的不等式：

苏瓦兹不等式　$|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\le\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|$

三角不等式　$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|\le\|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{w}\|$

范例 5　对于 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$与 $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$求 $\cos\theta$，并且验证两个不等式。

解　点积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=4$, 两者的长度都是$\sqrt{5}$,余弦是 4/5。

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}=\frac{4}{\sqrt{5}\ \sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

苏瓦兹不等式得到 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=4$ 小于$\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|=5$。使用三角不等式，第三边长是$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|$会小于第一边长加第二边长。针对 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(3,3)$，三个边长是$\sqrt{18}<\sqrt{5}+\sqrt{5}$，两边平方得到 $18<20$。

范例 6　$\boldsymbol{v}=(a,b)$与 $\boldsymbol{w}=(b,a)$的点积是 $2ab$，两者的长度都是$\sqrt{a^2+b^2}$，苏瓦兹不等式 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\le\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$得到 $\boldsymbol{2ab\le a^2+b^2}$。

如果写成 $x=a^2$ 与 $y=b^2$, 会得到更著名的结果。“几何平均值”$\sqrt{xy}$不大于“算术(arithmetic)平均值” $=(x+y)/2$。

几何平均值 ≤ 算术平均值　　$ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$ 变成 $\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}$

范例 5 的 $a=2$ 与 $b=1$, 所以 $x=4$ 与 $y=1$, 几何平均值$\sqrt{xy}=2$ 小于算术平均值$(1+4)/2=2.5$。

计算上的注解

MATLAB, Python, Julia 可以直接进行整个向量的计算，不用透过向量的分量。当 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 定义完成后就可以直接得到 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$。以行的方式输入 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$，利用符号 prime ′ 可以转置成列向量。$2\boldsymbol{v}+3\boldsymbol{w}$ 写成 2*$\boldsymbol{v}$ + 3*$\boldsymbol{w}$。除非结尾输入半分号符号“;”，否则结果会马上显示出来。

MATLAB　$\boldsymbol{v}$ = [2　3　4]'；　$\boldsymbol{w}$ = [1 1 1]'；　$\boldsymbol{u}$ = 2*$\boldsymbol{v}$ + 3*$\boldsymbol{w}$

点积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 是行向量乘列向量(使用*而不是 ·)。

点积通常写成$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$　或　$\boldsymbol{v}'*\boldsymbol{w}$　而不是 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$。

在 MATLAB 中，$\boldsymbol{v}$ 的长度写成 norm($\boldsymbol{v}$)，也就是 sqrt($\boldsymbol{v}$' * $\boldsymbol{v}$)，然后利用点积 $\boldsymbol{v}$' * $\boldsymbol{w}$ 求出余弦，再求出对应此余弦的角(单位是径度 radian)。

余弦公式	cosine = *v*' * *w* / (norm(*v*) * norm(*w*))
反余弦	angle = acos(cosine)

M-档案可以建立新的函数 cosine(*v*, *w*)。Python 与 Julia 都是开放源(open source)。

主要观念的复习

1. 点积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 的计算：所有的 $v_i w_i$ 先乘好再全部相加。
2. 长度$\|\boldsymbol{v}\|$是 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ 的平方根，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$是单位向量，长度等于 1。
3. 当 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 垂直，点积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$。
4. θ(任意两个非零向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的夹角)的余弦不超过 1：

   余弦 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}$，　　苏瓦兹不等式　$|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\le\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|$

已解范例

1.2A　向量 $\boldsymbol{v}=(3,4)$与 $\boldsymbol{w}=(4,3)$，针对 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 验证苏瓦兹不等式，以及针对$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|$验证三角不等式。求出 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 之间角度的 $\cos\theta$。什么样的 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 得到等式 $|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|=\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$ 与 $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|=\|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{w}\|$？

解　点积是 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=(3)(4)+(4)(3)=24$，$\boldsymbol{v}$ 的长度$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{9+16}=5$，$\|\boldsymbol{w}\|$也是 5。总和 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(7,7)$的长度是 $7\sqrt{2}<10$。

苏瓦兹不等式	$\lvert\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\rvert\le\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$ 得到 $24<25$
三角不等式	$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|\le\|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{w}\|$ 得到 $7\sqrt{2}<5+5$
角度的余弦	$\cos\theta=24/25$，这是 $\boldsymbol{v}=(3,4)$到 $\boldsymbol{w}=(4,3)$的夹角

等式：一个向量是另一个向量的倍数，如同 $\boldsymbol{w}=c\boldsymbol{v}$，角度是 0°或是 180°。在此情形下，$|\cos\theta|=1$ 且 $|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|=\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$。如果角度是 0°，比如说 $\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{v}$，则$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|=\|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{w}\|$ (两侧都是 $3\|\boldsymbol{v}\|$)，三边是 $\boldsymbol{v}, 2\boldsymbol{v}, 3\boldsymbol{v}$ 的三角形是扁平的。

1.2B 求出在 $\boldsymbol{v} = (3, 4)$方向的单位向量 $\boldsymbol{u}$。求出垂直于 $\boldsymbol{u}$ 的单位向量 $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{U}$ 有多少种可能性?

解 将 $\boldsymbol{v}$ 除以本身的长度$\|\boldsymbol{v}\| = 5$ 得到单位向量 $\boldsymbol{u}$，选择垂直向量 $\boldsymbol{V} = (-4, 3)$，这是因为$(3)(-4) + (4)(3) = 0$。将 $\boldsymbol{V}$ 除以长度$\|\boldsymbol{V}\|$得到与 $\boldsymbol{u}$ 垂直的单位向量：

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \qquad \boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{V}}{\|\boldsymbol{V}\|} = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right) \qquad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U} = 0$$

另外还有一个垂直单位向量是 $-\boldsymbol{U} = (4/5, -3/5)$。

1.2C 给定两个向量 $\boldsymbol{r} = (2, -1)$与 $\boldsymbol{s} = (-1, 2)$，求出向量 $\boldsymbol{x} = (c, d)$使得内积 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{r} = 1$ 以及 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{s} = 0$，

解 两个点积得到 c 与 d 的线性方程式，现在 $\boldsymbol{x} = (c, d)$

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{r} = 1 & \text{则} \quad 2c - d = 1 & \textbf{已解范例 1.1C} \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{s} = 0 & \text{则} \quad -c + 2d = 0 & \textbf{的相同方程式} \end{array}$$

关于 n 维空间的 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$的 n 个方程式的注解

段落 1.1 从列 $\boldsymbol{v}_j$ 开始，目标是建立 $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + ... + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{b}$。本段落从行 $\boldsymbol{r}_i$ 开始，现在的目标是找到 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{b}_i$。

很快的 $\boldsymbol{v}$'s 就是矩阵 A 的列，$\boldsymbol{r}$'s 就是 A 的行，(唯一的)问题就是求解 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$。

问题集 1.2

1 计算点积 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$以及 $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -.6 \\ .8 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2 计算问题 1 的向量长度$\|\boldsymbol{u}\|$与$\|\boldsymbol{v}\|$与$\|\boldsymbol{w}\|$，验证苏瓦兹不等式 $|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \le \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|$以及 $|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \le \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$。

3 求出问题 1 在 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 方向的单位向量，求出夹角的余弦。选择向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 使得这些向量与 $\boldsymbol{w}$ 的夹角分别是 0°，90°，180°。

4 对于任意单位向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$，求出点积 (实际数字)

(a) $\boldsymbol{v}$ 与 $-\boldsymbol{v}$ (b) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ (c) $\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w}$

5 分别求出在向量 $\boldsymbol{v} = (1, 3)$与 $\boldsymbol{w} = (2, 1, 2)$方向的单位向量 $\boldsymbol{u}_1$ 与 $\boldsymbol{u}_2$。再分别求出垂直 $\boldsymbol{u}_1$ 与 $\boldsymbol{u}_2$ 的单位向量 $\boldsymbol{U}_1$ 与 $\boldsymbol{U}_2$。

6 (a) 描述与向量 $\boldsymbol{v}=(2,-1)$垂直的每个向量 $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2)$。

(b) 所有与向量 $\boldsymbol{V}=(1,1,1)$垂直的向量落在三维空间的一个_______。

(c) 同时与向量(1, 1, 1)与(1, 2, 3)垂直的向量落在一个__________。

7 求出两个向量之间夹角θ(来自它的余弦)

(a) $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ (b) $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$ (d) $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$

8 是非题(如果正确，举出理由；如果错误，举出反例)：

(a) 如果 $\boldsymbol{u}=(1,1,1)$垂直 $\boldsymbol{v}$ 也垂直 $\boldsymbol{w}$，则 $\boldsymbol{v}$ 平行 $\boldsymbol{w}$。

(b) 如果 $\boldsymbol{u}$ 垂直 $\boldsymbol{v}$ 也垂直 $\boldsymbol{w}$，则 $\boldsymbol{u}$ 垂直 $\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}$。

(c) 如果 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 是互相垂直的单位向量，则$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|=\sqrt{2}$？*Yes!*

9 从(0, 0)出发到(v_1, v_2)与(w_1, w_2)的斜率分别是 v_2/v_1 与 w_2/w_1，假设斜率的乘积 v_2w_2/v_1w_1 是-1，证明 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$ 且两个向量垂直。(直线 $y=4x$ 与直线 $y=-x/4$ 垂直。)

10 分别画出从(0, 0)出发到点 $\boldsymbol{v}=(1,2)$与点 $\boldsymbol{w}=(-2,1)$的箭头，求出两个斜率的乘积。答案会是 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$ 的信号，而且两个箭头__________。

11 若 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 为负数，两者的夹角可以得到什么结论？画出一个三维向量 $\boldsymbol{v}$(箭头)，然后说明如何找到所有的 $\boldsymbol{w}$'s 使得 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}<0$。

12 若 $\boldsymbol{v}=(1,1)$与 $\boldsymbol{w}=(1,5)$，求出 c 使得 $\boldsymbol{w}-c\boldsymbol{v}$ 垂直于 $\boldsymbol{v}$。若 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 是任意的非零向量，找出 c 的公式。

13 互相垂直的非零向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 都与(1, 0, 1)垂直，求出 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$。

14 彼此垂直的非零向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$，他们都与(1, 1, 1, 1)垂直，求出 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$。

15 $x=2$ 与 $y=8$ 的几何平均值是$\sqrt{xy}=4$，算术平均值会稍大：$(x+y)/2=$_____。这是来自范例 6 中有关 $\boldsymbol{v}=(\sqrt{2}, \sqrt{8})$与 $\boldsymbol{w}=(\sqrt{8}, \sqrt{2})$的苏瓦兹不等式，求 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的 $\cos\theta$。

16 9 维空间中的向量 $\boldsymbol{v}=(1,1,\ldots,1)$的长度为何？求 $\boldsymbol{v}$ 方向的单位向量 $\boldsymbol{u}$，再求一个单位向量 $\boldsymbol{w}$ 垂直 $\boldsymbol{v}$。

17 向量(1, 0, −1)与坐标轴单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的夹角分别是α, β, θ，求出三个角的余弦值。验证公式 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\theta=1$。

问题 18-28 有关长度以及三角形的角的重要事实。

18 $\boldsymbol{v} = (4, 2)$与 $\boldsymbol{w} = (-1, 2)$组成的平行四边形是个矩形，验证毕氏定理 $a^2 + b^2 = c^2$

只有在直角三角形成立：($\boldsymbol{v}$ 的长度)^2 + ($\boldsymbol{w}$ 的长度)^2 = ($\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ 的长度)^2

19 (点积的规则) 下列方程式简单又好用：

(1) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$ (2) $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$ (3) $(c\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$

利用(2)，当 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, 证明 $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}$

20 余弦法则来自：$(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}$:

余弦法则 $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|\cos\theta + \|\boldsymbol{w}\|^2$

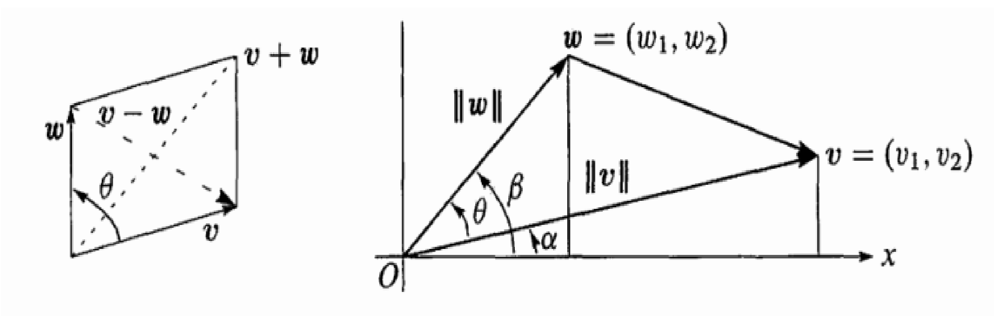
画出三边为 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ 的三角形，哪一个角是θ?

21 三角不等式说明：($\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ 的长度) ≤ ($\boldsymbol{v}$ 的长度) + ($\boldsymbol{w}$ 的长度)，

问题 19 指出 $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 + 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} + \|\boldsymbol{w}\|^2$，将 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ 变大成为$\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$，证明

||边 3|| 不能超过 ||边 1|| + ||边 2||。

三角不等式 $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|^2 \le (\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|)^2$ 或者 $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \le \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$



22 苏瓦兹不等式 $|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \le \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$，从代数的角度(不从三角学)来看：

(a) 两侧同乘本身得到 $(v_1w_1 + v_2w_2)^2 \le (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2)$。

(b) 证明上式左右两侧的差(difference)为$(v_1w_2 - v_2w_1)^2$。

因为平方不能为负——所以不等式成立。

23 图形显示 $\cos\alpha = v_1/\|\boldsymbol{v}\|$，$\sin\alpha = v_2/\|\boldsymbol{v}\|$，同理 $\cos\beta =$ ______，$\sin\beta =$ ______。

角度$\theta = \beta - \alpha$，代入三角公式 $\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \cos(\beta - \alpha)$，可以得到

$\cos\theta = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} / \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$。

24 对于单位向量(u_1, u_2)与(U_1, U_2)，利用一个式子证明$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U}| \le 1$：

$$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \le |u_1||U_1| + |u_2||U_2| \le \frac{u_1^{\ 2}+U_1^{\ 2}}{2} + \frac{u_2^{\ 2}+U_2^{\ 2}}{2} = 1$$

将$(u_1, u_2) = (0.6, 0.8)$，$(U_1, U_2) = (0.8, 0.6)$放在整条直线上，求 $\cos\theta$。

25 为什么一开始就说$|\cos\theta|$不会大于 1?

26 (推荐) 画出一个平行四边形。

27 平行四边形的两个边是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$，证明两条对角线的平方和会等于四个边的平方和：$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 + \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 = 2\|\boldsymbol{v}\|^2 + 2\|\boldsymbol{w}\|^2$。

28 若 $v = (1, 2)$，在 xy 平面画出使得 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = x + 2y = 5$ 的所有向量 $\boldsymbol{w} = (x, y)$，为什么答案会是一条直线？最短的 $\boldsymbol{w}$ 为何？

29 (推荐) 若$\|\boldsymbol{v}\| = 5$, $\|\boldsymbol{w}\| = 3$，则$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|$的最小值与最大值为何？$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 的最小值与最大值为何？

挑战问题

30 在 xy 平面会不会存在三个向量，使得 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} < 0$, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} < 0$, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} < 0$？我不知道在 xyz 平面有多少这样的向量，使得所有的点积是负数。(在平面绝对不存在 4 个向量有这样的性质。)

31 任意选取数值使得 $x + y + z = 0$，求出向量 $\boldsymbol{v} = (x, y, z)$与 $\boldsymbol{w} = (z, x, y)$的夹角。挑战问题：说明为什么 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} / \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$ 永远是$-1/2$。

32 你如何证明 $\sqrt[3]{xyz} \le \dfrac{x+y+z}{3}$ (几何平均值 ≤ 算术平均值)?

33 从向量$\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$中，利用正负号选取 4 个互相垂直的单位向量。

34 利用 MATLAB 的 $\boldsymbol{v}$ = randn(3, 1)指令，制造一个随机的单位向量 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$；利用 $\boldsymbol{V}$ = randn(3, 30)指令，制造 30 个以上的单位向量 $\boldsymbol{U}_j$。点积 $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{U}_j|$ 的平均大小是多少? 在微积分中，平均值是$\int_0^\pi |\cos\theta|\, d\theta / \pi = \dfrac{2}{\pi}$。

1.3 矩阵

1 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$ 是 3×2 矩阵：$m=3$ 行与 $n=2$ 列。

2 $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 是列的组合，$A\boldsymbol{x}=x_1\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$。

3 $A\boldsymbol{x}$ 的 3 个分量是 A 的 3 个行与向量 $\boldsymbol{x}$ 的点积：

每次处理一行 $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot7+2\cdot8\\3\cdot7+4\cdot8\\5\cdot7+6\cdot8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23\\53\\83\end{bmatrix}$

4 矩阵形式的方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$：使用 $\begin{bmatrix}2&5\\3&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ 取代 $\begin{matrix}2x_1+5x_2=b_1\\3x_1+7x_2=b_2\end{matrix}$。

5 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解可以写成 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$，但是有些矩阵不允许 A^{-1}。

本段落从三个向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 开始，我会使用矩阵来结合他们。

三个向量 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

在三维空间他们的线性组合是 $x_1\boldsymbol{u}+x_2\boldsymbol{v}+x_3\boldsymbol{w}$：

向量的组合
$$x_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}\tag{1}$$

重要事项：利用矩阵改写组合，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 变成矩阵 A 的列，矩阵乘向量 (x_1,x_2,x_3)：

矩阵乘向量，列的组合
$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}\tag{2}$$

数值 x_1,x_2,x_3 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量，矩阵 A 乘向量 $\boldsymbol{x}$ 等同于方程式(1)的三个列的组合 $x_1\boldsymbol{u}+x_2\boldsymbol{v}+x_3\boldsymbol{w}$。

这不只是 $A\boldsymbol{x}$ 的定义，因为改写带来了重要的不同观点，刚开始是三个数字 x_1, x_2,x_3 是乘向量，现在是矩阵乘这些数字。

矩阵 A 作用在向量 $\boldsymbol{x}$，输出 $A\boldsymbol{x}$ 是 A 的列的组合 $\boldsymbol{b}$。

为了观察作用，我把 b_1, b_2, b_3 写成 $A\boldsymbol{x}$ 的分量：

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \tag{3}$$

输入是 $\boldsymbol{x}$，输出是 $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$。这个 A 是一个差分矩阵(difference matrix)，因为 $\boldsymbol{b}$ 包含输入 $\boldsymbol{x}$ 的差，最上方的差是 $x_1 - x_0 = x_1 - 0$。

这里是一个展示 $\boldsymbol{x} = (1, 4, 9)$的差的范例：平方数在 $\boldsymbol{x}$ 中，奇数在 $\boldsymbol{b}$ 中。

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \text{平方数} \qquad A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 4-1 \\ 9-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \tag{4}$$

这个模式可以延伸到 4×4 矩阵，下一个平方数是 16，下一个差是 $x_4 - x_3 = 16 - 9 = 7$(下个奇数)。这个矩阵同时将所有的差 1, 3, 5, 7 全部计算出来。

重要注解： **每次乘一个行**。你已经研读矩阵与向量的乘法 $A\boldsymbol{x}$，也许可以换一种方式来解释，我们使用行而不使用列。一般情形是计算每一行与 $\boldsymbol{x}$ 的点积：

$$A\boldsymbol{x}\text{同样也是行的点积} \qquad A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,\ 0,\ 0)\cdot(x_1,\ x_2,\ x_3) \\ (-1,\ 1,\ 0)\cdot(x_1,\ x_2,\ x_3) \\ (0,\ -1,\ 1)\cdot(x_1,\ x_2,\ x_3) \end{bmatrix} \tag{5}$$

这些点积与方程式(3)的结果 $x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2$ 完全相同。新的方法是每次处理 $A\boldsymbol{x}$ 的一个列，线性组合是线性代数的关键，输出 $A\boldsymbol{x}$ 是 A **的列**的线性组合。

如果是数字，你可以用行来乘 $A\boldsymbol{x}$；如果是文字，用列处理比较好。第二章会再重复这些矩阵乘法的规则，并且解释这些概念。

线性方程式

观念的改变至关重要。目前为止数字 x_1, x_2, x_3 是已知，右侧的 $\boldsymbol{b}$ 未知，我们利用 A 乘 $\boldsymbol{x}$ 得到差的向量。**现在我们考虑 $\boldsymbol{b}$ 已知，要求解 $\boldsymbol{x}$。**

老问题：计算线性组合 $x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w}$ 求出 $\boldsymbol{b}$。

新问题：什么样的 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的线性组合产生特定的 $\boldsymbol{b}$?

这是一个逆反问题——找出输入 $\boldsymbol{x}$ 得到想要的输出 $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$。你已经见过这个，这是 x_1, x_2, x_3 的线性方程式系统。方程式右侧是 b_1, b_2, b_3，我现在要求解 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 找出 x_1, x_2, x_3：

方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ $\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &= b_1 \\ -x_1+x_2 \quad &= b_2 \\ -x_2+x_3 &= b_3 \end{aligned}$ 解 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ $\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_2 &= b_1+b_2 \\ x_3 &= b_1+b_2+b_3 \end{aligned}$ (6)

我现在立刻承认––大部分的线性系统都不容易求解。这个范例中，第一个方程式决定 $x_1 = b_1$, 第二个方程式产生 $x_2 = b_1 + b_2$。因为 A 是三角矩阵，这些方程式可以有序的求出解答(顶端至底部)。

检视两个特殊案例，右侧的 b_1, b_2, b_3 设成 0, 0, 0 与 1, 3, 5：

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \text{得到 } \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} \text{得到 } \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\1+3\\1+3+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\\9\end{bmatrix}$$

第一个解(全部是 0)比看起来更重要。口头说法：如果输出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，输入必须 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。对 A 来说，理论是成立的，但是对所有的矩阵而言却是不一定。第二个例子会说明(不同的矩阵 C)，当 $C\neq 0$ 且 $x\neq\boldsymbol{0}$ 时，如何才能得到 $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。

这个矩阵 A 是可逆，从 $\boldsymbol{b}$ 可以反推得到 $\boldsymbol{x}$，写成 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$。

逆矩阵

让我重复一次方程式(6)的解 $\boldsymbol{x}$，会出现一个总和矩阵！

$$\text{求解 } A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \qquad \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_1+b_2\\b_1+b_2+b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} \qquad (7)$$

如果 $\boldsymbol{x}$ 之间的差是 $\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{b}$ 之间的和就是 $\boldsymbol{x}$。对于奇数 $\boldsymbol{b}=(1,3,5)$与平方数 $\boldsymbol{x}=(1,4,9)$来说，这是正确的，对于所有的向量都是正确的。方程式(7)的**总和矩阵就是差分矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}**。

范例：$\boldsymbol{x}=(1,2,3)$的差是 $\boldsymbol{b}=(1,1,1)$，所以 $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}$ 且 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$:

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad A^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

方程式(7)的解 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$告诉我们两件重要的事实：

1. 对每一个 $\boldsymbol{b}$，存在一个 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解。 **2.** 矩阵 A^{-1} 得到 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$。

下一章会询问其他方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有没有解？如何求解？

微积分的注解：将这些特殊矩阵与微积分产生关联，向量 $\boldsymbol{x}$ 变成函数 $x(t)$，差 $A\boldsymbol{x}$ 变成导数 $dx/dt = b(t)$。反向来说，总和 $A^{-1}\boldsymbol{b}$ 变成 $b(t)$的积分。**差的和就如同导数的积分**。

微积分的基础定理告诉我们：**积分是微分的逆反**。

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \text{ 且 } \boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b} \qquad \frac{dx}{dt}=b \text{ 与 } x(t)=\int_0^t b\,dt \tag{8}$$

平方数 0, 1, 4, 9 的差是 1, 3, 5，$x(t)=t^2$ 的微分是 $2t$。当 $t=1, 2, 3$ 时得到偶数 $b=2, 4, 6$，这会是一个完美的类比。但是差分与微分不同，我们的矩阵 A 得到的不是 $2t$，而是 $2t-1$:

$$\text{反向} \quad x(t)-x(t-1)=t^2-(t-1)^2=t^2-(t^2-2t+1)=2t-1 \tag{9}$$

问题集会继续说明前向差分(forward difference)得到 $2t+1$。最好的选择(在微积分课程中不常见)是中心差分(centered difference)，形式是 $x(t+1)-x(t-1)$。将 Δx 除以距离 Δt，其中 Δt 是由 $t-1$ 到 $t+1$，所以 $\Delta t=2$：

$$x(t)=t^2 \text{ 的中心差分} \qquad \frac{(t+1)^2-(t-1)^2}{2}=2t \qquad (\text{恰好}) \tag{10}$$

差分矩阵很伟大，中心差分是最佳，我们的第二个范例是不可逆。

循环差分(cyclic difference)

这个范例保持同样的 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$，只是把 $\boldsymbol{w}$ 换成 $\boldsymbol{w}^*$：

$$\text{第二个范例} \qquad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{w}^*=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

现在 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}^*$的线性组合得到**循环差分矩阵** C:

$$\text{循环} \qquad C\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_3\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{b} \tag{11}$$

矩阵 C 不是三角形，给定 $\boldsymbol{b}$ 时不是那么简单求解 $\boldsymbol{x}$。事实上是不可能求得 $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，因为这三个方程式不是得到**无限多解**(偶尔)，就是**无解**(经常)：

$$C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \text{ 有无限多 } \boldsymbol{x} \quad \begin{bmatrix}x_1-x_3\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \text{ 的解是所有的向量 } \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\c\\c\end{bmatrix} \tag{12}$$

每一个常数向量，例如 $\boldsymbol{x}=(3, 3, 3)$在循环时的差都是 0。未定常数 c 就如同求取积分时的$+\,C$。循环差分使得第一分量变成 x_1-x_3，而不是从 $x_0=0$ 开始。

$C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 更大的可能性是 $\boldsymbol{x}$ 完全无解：

$C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	$\begin{bmatrix} x_1-x_3 \\ x_2-x_1 \\ x_3-x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$	左侧相加等于0 右侧相加等于9 x_1，x_2，x_3 无解	(13)

从几何的观点来看，不存在 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}^*$的线性组合可以得到向量 $\boldsymbol{b}=(1, 3, 5)$，这样的线性组合无法形成全部的三维空间。右侧必须有 $b_1+b_2+b_3=0$，才能允许 $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有一个解，这是因为左侧的 $x_1-x_3, x_2-x_1, x_3-x_2$ 相加必定为 0。换言之：

所有的线性组合 $x_1\boldsymbol{u}+x_2\boldsymbol{v}+x_3\boldsymbol{w}^*$落在 $b_1+b_2+b_3=0$ 给定的平面。

这个主题突然把代数与几何结合在一起，线性组合可以形成整个空间，也可以只形成一个平面。我们需要一个图形来展示 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$(第一个例子)与 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}^*$(在同一个平面)之间的重要差别:

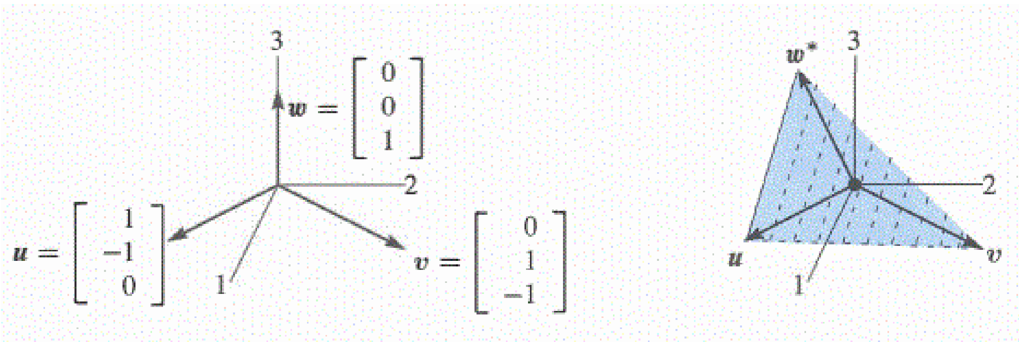


图 1.10：无关向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$；落在同一平面的相关向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}^*$。

无关与相关

图 1.10 中第一个展示矩阵 A 的列向量，后面展示 C 的列向量。前两个列 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 在两个图形中完全相同，如果我们只检视这两个向量的组合，我们得到一个二维平面，**关键问题在于第三个向量是否在这个平面上。**

无关(independence)　　$\boldsymbol{w}$ 不在 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的平面上。

相关(dependence)　　$\boldsymbol{w}^*$在 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的平面上。

重点是新向量 $\boldsymbol{w}^*$是 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的线性组合：

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}^*=\boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{w}^*=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=-\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \tag{14}$$

这三个向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}^*$的分量总和都是零，所有的线性组合会有 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$(如同我们前面说的，把三个方程式相加)，这就是 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的线性组合形成平面的方程式。现在引进 $\boldsymbol{w}^*$，因为 $\boldsymbol{w}^*$已经在这个平面上，我们没有得到新的向量。

原始 $\boldsymbol{w} = (0, 0, 1)$不在平面上：$0 + 0 + 1 \neq 0$，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的线性组合形成整个三维空间。我们知道，因为方程式(6)的解 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ 给出正确的组合产生任意 $\boldsymbol{b}$。

前面两个矩阵 A 与 C，对应的第三个向量分别是 $\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{w}^*$，允许我提出两个线性代数的关键字：无关与相关。本课程的前半段会更深入探讨这些观念—如果你在前面两个例子中已经学会，我会很快乐的：

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 无关，除了 $0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ 之外，没有其他线性组合得到 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$。

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}^*$相关，存在诸如 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}^*$的其他组合得到 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$。

你可以在三维空间作图，三个向量落在一个平面，或者不在同一个平面。第二章讨论 n 维空间中的 n 个向量，无关或相关是关键点，这些向量进入一个 $n\times n$ 矩阵的列:

无关列：$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有一个解，A 是**可逆矩阵**。

相关列：$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有很多解，A 是**奇异矩阵**。

最终我们会讨论 m 维空间中的 n 个向量，有 n 个列的矩阵 A 现在是矩形($m\times n$)。了解 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 是第三章的问题。

主要观念的复习

1. 矩阵乘向量：$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}$ **的列的组合**。
2. 当 A 是可逆矩阵，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解是 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$。
3. 循环矩阵 C 没有逆矩阵，它的三个列落在同一平面，这些相关的列相加得到零向量，$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有很多解。
4. 本段落是关键概念的超前理解，还没有完全说明。

已解范例

1.3A 把 A 的西南角单元 a_{31}(行 3，列 1)改成 $a_{31} = \mathbf{1}$：【entry 翻译成单元，有别于元素 element】

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ \boldsymbol{x_1} - x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

对任意 $\boldsymbol{b}$ 求解 $\boldsymbol{x}$。从 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ 看出逆矩阵 A^{-1}。

解 由上而下求解(线性三角形)系统 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{array}{l} \text{首先}\ x_1 = b_1 \\ \text{然后}\ x_2 = b_1 + b_2 \\ \text{然后}\ x_3 = b_2 + b_3 \end{array} \quad \text{意思是}\ \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

这是很好的练习，可以看到逆矩阵的列乘 b_1, b_2, b_3。A^{-1} 的第一列是对应 $\boldsymbol{b} = (1, 0, 0)$的解；第二列是对应 $\boldsymbol{b} = (0, 1, 0)$的解；$A^{-1}$ 的第三列 $\boldsymbol{x}$ 是对应 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = (0, 0, 1)$ 的解。

矩阵 A 的三个列仍然无关，他们不在同一个平面，这三个列的线性组合，使用正确的加权 x_1, x_2, x_3，可以产生任意的三维向量 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$，这些加权来自 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$。

1.3B E 是一个**消元(elimination)矩阵**，E 有一个减法，E^{-1} 有一个加法。

$$\boldsymbol{b} = E\boldsymbol{x} \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - lx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -l & 1 \end{bmatrix}$$

第一个方程式是 $x_1 = b_1$，第二个方程式是 $x_2 - lx_1 = b_2$。因为消元矩阵存在减法，逆矩阵会把 lb_1 加到 b_2：

$$\boldsymbol{x} = E^{-1}\boldsymbol{b} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ lb_1 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix}$$

1.3C 把 C 从循环差分变成**中心差分**产生 $x_3 - x_1$:

$$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - 0 \\ x_3 - x_1 \\ 0 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 只有在 $b_1 + b_3 = x_2 - x_2 = 0$ 才有解，这是三维空间中向量 $\boldsymbol{b}$ 的一个平面。C 的每一列都在这个平面上，这个矩阵没有逆矩阵，所以平面包含了这些列的全部组合(就是所有的向量 $C\boldsymbol{x}$)。

我将 0 包含进去，所以你看到 C 产生“中心差分”，$C\boldsymbol{x}$ 的行 i 是 x_{i+1} (中心的右)减去 x_{i-1} (中心的左)。以下是 4×4 的例子：

$$\begin{array}{c} C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \text{中心差分} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 0 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_2 \\ 0 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \tag{16}$$

惊讶的是这个矩阵现在是可逆！第一行与最后一行告诉你 x_2 与 x_3，中间的行给出 x_1 与 x_4。可以继续往下写出逆矩阵 $\boldsymbol{C}^{-1}$，但是 5×5 矩阵又变成奇异(不可逆)...

问题集 1.3

1 求线性组合 $3\boldsymbol{s}_1+4\boldsymbol{s}_2+5\boldsymbol{s}_3=\boldsymbol{b}$，然后将 $\boldsymbol{b}$ 写成矩阵-向量的乘积 $S\boldsymbol{x}$，其中 3, 4, 5 在 $\boldsymbol{x}$ 里面。再计算三个点积：$(S\text{ 的行})\cdot\boldsymbol{x}$：

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{s}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{s}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad \text{进入 } S \text{ 的列}$$

2 求解 $S\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$，其中 S 的列是问题 1 的 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_3$:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad \text{以及}\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\\9\end{bmatrix}$$

S 是一个总和矩阵。前五个奇数的总和是______。

3 求解以下三个方程式，使用 c_1,c_2,c_3 表示 y_1,y_2,y_3:

$$S\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}\qquad \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{y}$ 写成矩阵 $A=S^{-1}$ 乘向量 $\boldsymbol{c}$，请问 S 的列是无关或是相关？

4 当 $x_1=1$ 时，什么样的组合 $x_1\boldsymbol{w}_1+x_2\boldsymbol{w}_2+x_3\boldsymbol{w}_3$ 可以得到零向量：

$$\boldsymbol{w}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{w}_2=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{w}_3=\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$$

这些向量是无关或是相关？这三个向量落在一个______上。这三个列向量构成的矩阵 W 是不可逆。

5 矩阵 W 的行产生三个向量(我把他们写成列向量):

$$\boldsymbol{r}_1=\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{r}_2=\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{r}_3=\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}$$

线性代数说这些向量必须落在同一平面，必定存在许多组合 $y_1\boldsymbol{r}_1+y_2\boldsymbol{r}_2+y_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}$，求出两组的 y's。

6 什么样的 c 会得到相关的列，使得列的一个组合等于零。

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\3&2&1\\7&4&c\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1&0&c\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}c&c&c\\2&1&5\\3&3&6\end{bmatrix}\quad \text{当 } c\neq 0\text{，可能永远无关吗？}$$

7 如果列组合得到 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，则每一行都有 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x}=0$:

$$\begin{bmatrix} & & \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{以行来看} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{x} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这三个行也落在同一平面，为什么这个平面与 $\boldsymbol{x}$ 垂直?

8 现在讨论 4×4 的差分方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，求出四个分量 x_1, x_2, x_3, x_4，再将解写成 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$，求出逆矩阵：

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}=\boldsymbol{b}$$

9 4×4 的循环差分矩阵 C 为何？它在每一行与每一列都会有 1 与−1。求出所有的解 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4)$使得 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。$C$ 的四个列会落在四维空间的一个三维超平面上。

10 前向差分矩阵Δ是上三角形：

$$\Delta\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_2-z_1 \\ z_3-z_2 \\ 0-z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{b}$$

利用 b_1, b_2, b_3 求 z_1, z_2, z_3。$\boldsymbol{z}=\Delta^{-1}\boldsymbol{b}$ 的逆矩阵为何？

11 证明前向差分$(t+1)^2-t^2$ 是 $2t+1=$ 奇数。如同微积分所述，$(t+1)^n-t^n$ 会从 t^n 的导数开始，就是________。

12 **已解范例**的最后一行显示方程式(16)里面的 4×4 中心差分矩阵是可逆，求解 $C\boldsymbol{x}=(b_1, b_2, b_3, b_4)$，找出 $\boldsymbol{x}=C^{-1}\boldsymbol{b}$ 的逆矩阵。

挑战问题

13 前述说明 5×5 中心差分矩阵不可逆。请写出 5 个 $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的方程式，求出左侧的线性组合得到零。b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 的何种组合必须等于零？(这 5 列落在 5 维空间的 4 维超平面上，难以视觉化。)

14 若(a, b)是(c, d)的倍数且 $abcd\neq 0$，证明(a, c)是(b, d)的倍数。这个结果非常重要，这两列落在同一条直线上。你可以先用数字看看 a, b, c, d 之间的关系。方程式会得到：

$$\text{若}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\text{有相关的行，必定有相关的列。}$$